Βασικές Έννοιες στη Θεωρία Γραφημάτων

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 83200 Καρλόβασι, Σάμος
Email: fotakis@aegean.gr

1 Βασικοί Ορισμοί

Διαισθητικά, γράφημα είναι οτιδήποτε μπορεί να αναπαρασταθεί ("ζωγραφιστεί") με σημεία (κορυφές) και γραμμές (ακμές - κατευθυνόμενες ή μη) μεταξύ των σημείων.

Τυπικά, ένα *μη-κατευθυνόμενο γράφημα* (ή γράφος, undirected graph) G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $G \equiv (V, E)$, όπου $V = \{v_1, \dots v_n\}$ είναι το σύνολο των κορυφών του και $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ είναι το σύνολο των ακμών του. Κάθε ακμή είναι ένα διμελές σύνολο κορυφών, $e = \{v_1, v_2\}$, όχι απαραίτητα διαφορετικών μεταξύ τους. Στα *κατευθυνόμενα* γραφήματα (directed graphs), κάθε ακμή είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος κορυφών, $e = (v_1, v_2)$. Τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν ένα γράφημα $G(V, E)$ είναι ο αριθμός των κορυφών του, συνήθως συμβολίζεται με n ή $|V|$, και ο αριθμός των ακμών του, συνήθως συμβολίζεται με m ή $|E|$.

Η (μη-κατευθυνόμενη) ακμή $e = \{v_1, v_2\}$ λέμε ότι συνδέει τις κορυφές v_1 και v_2, οι οποίες ονομάζονται και άκρα της. Η κατευθυνόμενη ακμή $e = (v_1, v_2)$ λέμε ότι συνδέει την κορυφή v_1 με την v_2. Η v_1 ονομάζεται ουρά (ή αρχή) της ακμής e και η v_2 ονομάζεται κεφαλή (ή τέλος) της e. Δύο κορυφές που συνδέονται με ακμή ονομάζονται *γειτονικές*. Μία ακμή που τα δύο άκρα της ταυτίζονται (ή η αρχή της ταυτίζεται με το τέλος της αν είναι κατευθυνόμενη) ονομάζεται βρόγχος (loop). Δύο ακμές με κοινά άκρα (ή κοινή αρχή και τέλος αν είναι κατευθυνόμενες) ονομάζονται *παράλληλες*.

Ένα γράφημα ονομάζεται *απλό* όταν δεν έχει παράλληλες ακμές και βρόγχους. Στο εξής, θα θεωρούμε πάντα απλά γραφήματα (εκτός αν σαφώς δηλώνεται κάτι διαφορετικό). Ειδικότερα, με τον όρο γράφημα θα αναφερόμαστε σε ένα *απλό, μη-κατευθυνόμενο γράφημα*. Επίσης, θα αναφερθούμε μόνο σε *πεπερασμένα* γραφήματα που ορίζονται σε πεπερασμένα σύνολα κορυφών.

Το *συμπληρωματικό* ενός γραφήματος $G(V, E)$, συνήθως συμβολίζεται με $\overline{G}$, είναι ένα γράφημα στο ίδιο σύνολο κορυφών V που περιλαμβάνει μια ακμή αν και μόνο αν αυτή δεν ανήκει στο E. Ένα γράφημα ονομάζεται *κλίκα* (ή πλήρες γράφημα) αν κάθε ζεύγαρι κορυφών του συνδέεται με ακμή. Η κλίκα n κορυφών συμβολιζεται με K_n και έχει ακριβώς $\frac{n(n-1)}{2}$ ακμές. Ένα σύνολο κορυφών χωρίς καμία ακμή μεταξύ τους ονομάζεται *σύνολο ανεξαρτησίας*. Συνεπώς, το συμπληρωματικό γράφημα μιας κλίκας είναι ένα σύνολο ανεξαρτησίας (στο ίδιο σύνολο κορυφών).

Ένα γράφημα ονομάζεται διμερές (ή διχοτομίσιμο, bipartite) αν οι κορυφές του μπορούν να χωριστούν σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα γράφημα είναι διμερές ανν δεν έχει κύκλους περιττού μήκους. Ένα διμερές γράφημα ονομάζεται *πλήρες* αν κάθε κορυφή στο ένα μέρος (σύνολο ανεξαρτησίας) συνδέεται με κάθε κορυφή στο άλλο μέρος. Το πλήρες διμερές γράφημα με n κορυφές στο ένα μέρος και m κορυφές στο άλλο μέρος συμβολίζεται με $K_{n,m}$ και έχει $n \cdot m$ ακμές.

Άσκηση. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ακμών που μπορεί να περιέχει ένα απλό διμερές γράφημα με n κορυφές; Ισοδύναμα, να δείξετε ότι κάθε απλό γράφημα με n κορυφές και περισσότερες από $n^2/4$ ακμές δεν είναι διμερές.

Λύση. Ο μέγιστος αριθμός ακμών συμβαίνει όταν έχουμε το πλήρες διμερές γράφημα. Αφού όλες οι κορυφές είναι n, αν το ένα σύνολο κορυφών περιέχει k κορυφές, το δεύτερο θα περιέχει $(n-k)$. Ο συνολικός αριθμός ακμών του $K_{k,n-k}$ είναι $k(n-k)$. Το γινόμενο μεγιστοποιείται για $k = n/2$ αν το n είναι άρτιος και για $k = (n-1)/2$ αν το n είναι περιττός. Συνεπώς, αν το n είναι άρτιος, ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι $n^2/4$, ενώ αν το n είναι περιττός, ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι $(n^2-1)/4$. Παρατηρείστε ότι οι αντίστοιχοι αριθμοί είναι πάντα ακέραιοι. □

Μια ακολουθία "συνεχόμενων" ακμών ονομάζεται *διαδρομή* (walk). Δηλαδή, διαδρομή είναι μια ακολουθία ακμών $(e_1, \ldots, e_k)$ όπου για κάθε i, $1 \leq i \leq k-1$, το ένα άκρο (το τέλος για κατευθυνόμενα γραφήματα) της ακμής e_i συμπίπτει με το άλλο άκρο (την αρχή) της ακμής e_{i+1}. Ο αριθμός των ακμών στη διαδρομή ονομάζεται *μήκος* της διαδρομής. Μία διαδρομή ονομάζεται *μονοκονδυλιά* (trail) όταν όλες οι ακμές της είναι διαφορετικές και ονομάζεται *μονοπάτι* (path) όταν όλες οι κορυφές από τις οποίες διέρχεται είναι διαφορετικές. Μερικές φορές, χρησιμοποιείται ο όρος μονοπάτι για τη μονοκονδυλιά (διαδρομή διαφορετικών ακμών) και απλό μονοπάτι (simple path) για τη διαδρομή με διαφορετικές κορυφές (και άρα ακμές).

Μία διαδρομή χαρακτηρίζεται σαν *κλειστή* όταν η αρχική και η τελική της κορυφή συμπίπτουν. Μια κλειστή διαδρομή ονομάζεται *κύκλος* (cycle ή *κύκλωμα*, circuit) όταν όλες οι ακμές της είναι διαφορετικές, και ονομάζεται *απλός κύκλος* (simple cycle) όταν όλες οι κορυφές της είναι διαφορετικές. Με άλλα λόγια, ο κύκλος (ή κύκλωμα) είναι μία κλειστή μονοκονδυλιά και ο απλός κύκλος είναι ένα κλειστό μονοπάτι.

Η *απόσταση* $D(u, v)$ μεταξύ δύο κορυφών u, v είναι το μήκος του συντομώτερου μονοπατιού μεταξύ τους. Η *διάμετρος* $D(G)$ ενός γραφήματος $G(V, E)$ είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών στο G, $D(G) \equiv \max_{u,v \in V}\{D(u, v)\}$.

Άσκηση. Να αποδείξετε ότι κάθε γράφημα περιέχει μία διαδρομή από μια κορυφή u σε μια κορυφή w αν και μόνο αν περιέχει ένα μονοπάτι από τη u στη w.

Λύση. Η μία κατεύθυνση είναι προφανής, γιατί κάθε μονοπάτι είναι εξ' ορισμού διαδρομή. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, παρατηρώ ότι αν η διαδρομή μεταξύ u και w δεν αντιστοιχεί σε μονοπάτι, τότε αυτή πρέπει να περιέχει κορυφές που επαναλαμβάνονται. Όμως, το τμήμα της διαδρομής ανάμεσα σε δύο διαφορετικές εμφανίσεις της ίδιας κορυφής είναι ένας κύκλος (όχι κατ' ανάγκη απλός). Αφαιρώντας όλους αυτούς τους κύκλους, καταλήγω σε ένα μονοπάτι από τη u στη w. Με απολύτως παρόμοιο τρόπο μπορείτε να αποδείξετε ότι ένα γράφημα περιέχει μία κλειστή διαδρομή (ή έναν κύκλο) αν και μόνο αν περιέχει έναν απλό κύκλο. □

Άσκηση. Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος περιέχει έναν απλό κύκλο και ότι κάθε μονοκονδυλιά περιέχει ένα απλό μονοπάτι. □

Ένα (μη-κατευθυνόμενο) γράφημα είναι *συνεκτικό* (ή συνδεόμενο, ή συνδεδεμένο, connected) όταν υπάρχει μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι κορυφών. Δηλαδή, σε ένα συνεκτικό γράφημα μπορούμε να μεταβούμε από οποιαδήποτε κορυφή σε οποιαδήποτε άλλη ακολουθώντας τις ακμές του γραφήματος.

Συνεκτικές Συνιστώσες. Δίνεται ένα (μη-κατευθυνόμενο) γράφημα $G(V, E)$. Θεωρώ τη διμελή σχέση $\Sigma_G \subseteq V \times V$ τέτοια ώστε $(u, v) \in \Sigma_G$ ανν υπάρχει μονοπάτι από τη u στη v.

Η σχέση Σ_G είναι σχέση *ισοδυναμίας* γιατί είναι ανακλαστική ($\forall u \in V, (u, u) \in \Sigma_G$ - για κάθε κορυφή υπάρχει ένα τετριμμένο μονοπάτι προς τον εαυτό της με μηδενικό μήκος), συμμετρική ($\forall u, v \in V, (u, v) \in \Sigma_G \Rightarrow (v, u) \in \Sigma_G$ - το γράφημα είναι μη κατευθυνόμενο και συνεπώς αν υπάρχει μονοπάτι από τη u στη v, θα υπάρχει και μονοπάτι από τη v στη u), και μεταβατική ($\forall u, v, w \in V, (u, w) \in \Sigma_G$ και $(w, v) \in \Sigma_G \Rightarrow (u, v) \in \Sigma_G$ - μεταβαίνω από τη u στη w και από εκεί στη v ακολουθώντας τα αντίστοιχα μονοπάτια).

Η σχέση Σ_G χωρίζει τις κορυφές του γραφήματος σε κλάσεις ισοδυναμίες (που αντιστοιχούν στα μεγιστοτικά (maximal) συνεκτικά υπογραφήματα του G) που ονομάζονται *συνεκτικές συνιστώσες* (connected components). Κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι ένα συνεκτικό γράφημα, ενώ δεν υπάρχει μονοπάτι μεταξύ κορυφών που ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες. Σε πολλές κατηγορίες ασκήσεων, κάθε συνεκτική συνιστώσα μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν ανεξάρτητο γράφημα. □

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι *συνεκτικό* όταν για κάθε ζευγάρι κορυφών του $u, v \in V$, υπάρχει μονοπάτι (που σέβεται τις κατευθύνσεις των ακμών) είτε από τη u στη v είτε από τη v στη u. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι *ισχυρά συνεκτικό* (strongly connected) όταν για κάθε ζευγάρι κορυφών του $u, v \in V$, υπάρχουν μονοπάτια (που σέβονται τις κατευθύνσεις των ακμών) και από τη u στη v και από τη v στη u.

Για να είναι η Σ_G σχέση ισοδυναμίας στα κατευθυνόμενα γραφήματα, πρέπει να εξασφαλίζεται η συμμετρική ιδιότητα (δεν ισχύει πλέον αυτονόητα γιατί οι ακμές είναι κατευθυνόμενες). Αυτό συμβαίνει αν ορίσουμε τη Σ_G σαν $\Sigma_G \subseteq V \times V$: $(u, v) \in \Sigma_G$ ανν υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι και από τη u στη v και από τη v στη u. Οι κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζονται από τη σχέση Σ_G σε κατευθυνόμενα γραφήματα ονομάζονται *ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες* (strongly connected components) και αντιστοιχούν στα μεγιστοτικά ισχυρά συνεκτικά υπογραφήματα του G.

Παρατηρούμε επίσης ότι ο αριθμός των (ισχυρά) συνεκτικών συνιστωσών δεν μπορεί να μεγαλώσει αν προσθέσουμε νέες ακμές στο γράφημα αφού η προσθήκη νέων ακμών δεν μπορεί να αφαιρέσει από το γράφημα κάποιο μονοπάτι που ήδη υπήρχε.

Άσκηση. Να αποδείξετε ότι ένα γράφημα είναι συνεκτικό ανν για κάθε διαμέριση των κορυφών του σε δύο υποσύνολα υπάρχει πάντα ακμή μεταξύ των δύο υποσυνόλων.

Λύση. Αν το γράφημα είναι συνεκτικό, θα πρέπει να υπάρχει ακμή που θα επιτρέπει τη "μετάβαση" από το ένα σύνολο στο άλλο. Για το αντίστροφο, ξεκινάμε από μία οποιαδήποτε κορυφή, επεκτεινόμαστε τους γειτόνους της, στους γειτόνους των γειτόνων της, κοκ. Η ιδιότητα που υποθέσαμε εξασφαλίζει ότι αυτή η διαδικασία δεν θα τελειώσει πριν επισκεφθούμε όλες τις κορυφές του γραφήματος. Η συγκεκριμένη διαδικασία είναι μια παραλλαγή του Ψαξίματος Πρώτα σε Πλάτος (Breadth First Search). □

Άσκηση. Να αποδείξετε ότι το συμπληρωματικό κάθε μη συνεκτικού γραφήματος είναι συνεκτικό (και μάλιστα έχει διάμετρο το πολύ 2).

Λύση. Έστω μη συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ και έστω u, w δύο οποιεσδήποτε κορυφές του G. Θα δείξω ότι στο συμπληρωματικό γράφημα του G, έστω $\overline{G}$, υπάρχει μονοπάτι μεταξύ των u και w.

Αφού το G είναι μη συνεκτικό, θα αποτελείται από περισσότερες της μίας συνεκτικές συνιστώσες. Διακρίνω τις ακόλουθες περιπτώσεις.
Περίπτωση 1. Οι κορυφές u και w ανήκουν σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα του G. Τότε η ακμή $\{u, w\}$ δεν υπάρχει στο γράφημα G (αλλιώς οι δύο κορυφές θα ήταν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα). Επομένως, η ακμή $\{u, w\}$ υπάρχει στο συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$ και η απόσταση των u, v είναι 1.
Περίπτωση 2. Οι κορυφές u και w ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G. Έστω κορυφή v που ανήκει σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα από αυτή που ανήκουν οι u και w (εδώ χρησιμοποιώ την υπόθεση για τη μη συνεκτικότητα του G). Όπως και στην Περίπτωση 1, οι ακμές $\{u, v\}$ και $\{v, w\}$ δεν υπάρχουν στο G, και επομένως υπάρχουν στο συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$. Συνεπώς, στο συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$, οι κορυφές u και w συνδέονται μέσω του μονοπατιού $u\,v\,w$. Η απόσταση των u, v είναι 2. □

2 Βαθμός Κορυφής

Σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, ο *βαθμός* (degree) μιας κορυφής v, που συμβολίζεται με $d(v)$, είναι ο αριθμός των ακμών που εφάπτονται στη v. Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα, διακρίνουμε το *βαθμό εισόδου* (in-degree) της v, που συμβολίζεται με $d_{\rm in}(v)$ και είναι ο αριθμός των ακμών που καταλήγουν στη v, και το *βαθμό εξόδου* (out-degree) της v, που συμβολίζεται με $d_{\rm out}(v)$ και είναι ο αριθμός των ακμών που ξεκινούν από τη v.

Ο *ελάχιστος βαθμός* $\delta(G)$ ενός γραφήματος $G(V, E)$ είναι ο μικρότερος βαθμός κάποιας κορυφής του, $\delta(G) \equiv \min_{v\in V}\{d(v)\}$. Ο *μέγιστος βαθμός* $\Delta(G)$ ενός γραφήματος $G(V, E)$ είναι ο μεγαλύτερος βαθμός κάποιας κορυφής του, $\Delta(G) \equiv \max_{v\in V}\{d(v)\}$.

Σε κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα, το άθροισμα του βαθμού όλων των κορυφών είναι διπλάσιο του αριθμού των ακμών: $\sum_{v\in V} d(v) = 2\,|E|$. Ο λόγος είναι ότι κάθε ακμή συνεισφέρει 1 στο βαθμό των δύο άκρων της. Από αυτή την ισότητα προκύπτει ότι ο αριθμός των κορυφών με περιττό βαθμό σε ένα γράφημα είναι άρτιος.

Σε κάθε κατευθυνόμενο γράφημα, το άθροισμα του βαθμού εισόδου όλων των κορυφών είναι ίσο με το άθροισμα του βαθμού εξόδου και ίσο με τον αριθμό των ακμών: $\sum_{v\in V} d_{\rm in}(v) = \sum_{v\in V} d_{\rm out}(v) = |E|$. Ο λόγος είναι ότι κάθε ακμή συνεισφέρει 1 στο βαθμό εισόδου του τέλους της και 1 στο βαθμό εξόδου της αρχής της.

Παράδειγμα: Υπάρχει γράφημα με 9 κορυφές που όλες έχουν βαθμό 3[1]; Η απάντηση είναι *όχι* γιατί ένα τέτοιο γράφημα θα έπρεπε να έχει $3 \times 9 = 27/2 = 13.5$ ακμές.

Άσκηση. Να αποδείξετε ότι δεν μπορεί να υπάρξει απλό γράφημα με (α) 6 κορυφές με βαθμό 2, 3, 3, 4, 4, και 5 αντίστοιχα, (β) 5 κορυφές με βαθμό 2, 3, 4, 4, και 5 αντίστοιχα, (γ) 4 κορυφές με βαθμό 1, 3, 3, και 3 αντίστοιχα, (δ) 7 κορυφές με βαθμό 1, 3, 3, 4, 5, 6 και 6 αντίστοιχα.

Λύση. (α) Το άθροισμα των βαθμών είναι περιττός. (β) Ο μέγιστος βαθμός είναι ίσος με τον αριθμό των κορυφών. (γ) Και οι τρεις κορυφές βαθμού 3 πρέπει να συνδέονται στην τέταρτη που

[1] Ένα γράφημα του οποίου όλες οι κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό ονομάζεται *κανονικό* (regular). Όταν ο βαθμός όλων των κορυφών είναι k, το γράφημα ονομάζεται k-κανονικό. Όταν ο βαθμός όλων των κορυφών είναι 3, το γράφημα ονομάζεται *κυβικό* (cubic). Ένας k-κανονικός γράφος περιέχει $kn/2$ ακμές.

έχει βαθμό 1. (δ) Οι δύο κορυφές βαθμού 6 πρέπει να συνδέονται σε όλες τις κορυφές, άρα και σε αυτή με βαθμό 1. □

Άσκηση. Έστω απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ στο οποίο το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1$ ($n \equiv |V|$). Να αποδείξετε ότι το γράφημα G είναι συνεκτικό (και μάλιστα έχει διάμετρο το πολύ 2). Το ίδιο ισχύει και αν $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$.

Λύση. Έστω u, v δύο αυθαίρετα επιλεγμένες κορυφές που δεν συνδέονται με ακμή (αν συνδέονται με ακμή, προφανώς υπάρχει μονοπάτι μεταξύ τους και η απόστασή τους είναι 1). Θα δείξουμε ότι υπάρχει μονοπάτι μεταξύ των u και v αποδεικνύοντας ότι το G είναι συνεκτικό.

Έστω $\Gamma(u)$ και $\Gamma(v)$ τα σύνολα των κορυφών που είναι γειτονικές με τις u και v αντίστοιχα. Από υπόθεση $v, u \notin \Gamma(u) \cup \Gamma(v)$. Θα δείξουμε ότι $\Gamma(u) \cap \Gamma(v) \neq \emptyset$, δηλαδή ότι οι u και v έχουν ένα κοινό γείτονα. Επομένως, υπάρχει μονοπάτι μήκους 2 μεταξύ τους.

Πράγματι, αν $\Gamma(u) \cap \Gamma(v) = \emptyset$, θα είχαμε $|\Gamma(u)| + |\Gamma(v)| = d(u) + d(v) \geq n - 1$. Αυτό είναι άτοπο επειδή $v, u \notin \Gamma(u) \cup \Gamma(v)$ και όλες οι κορυφές του γραφήματος είναι n. □

Άσκηση. Να δείξετε ότι κάθε απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές και περισσότερες από $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ ακμές είναι συνεκτικό.

Λύση. Έστω ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα που δεν είναι συνεκτικό. Θα αποτελείται από τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες (χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι οι συνεκτικές του συνιστώσες είναι ακριβώς δύο). Έστω k, $1 \leq k \leq n-1$, ο αριθμός των κορυφών της μίας και $(n-k)$ ο αριθμός των κορυφών της άλλης. Η πρώτη θα έχει το πολύ $\frac{k(k-1)}{2}$ ακμές και η δεύτερη το πολύ $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ ακμές. Ο σνολικός αριθμός ακμών είναι $\frac{n(n-1)-2k(n-k)}{2}$. Το κλάσμα αυτό μεγιστοποείται για $k = 1$ και $k = n-1$ (Η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή του k που αντιστοιχεί σε μη συνεκτικό γράφημα. Το αντίστοιχο γράφημα είναι μία κλίκα με $n-1$ κορυφές και μία απομονωμένη κορυφή.) Προκύπτει λοιπόν ότι το γράφημα έχει το πολύ $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ακμές. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι το γράφημα έχει περισσότερες από $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ ακμές. □

Άσκηση. Έστω γράφημα με ακριβώς δύο κορυφές περιττού βαθμού. Τότε αυτές ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα (ή ισοδύναμα, υπάρχει μονοπάτι μεταξύ τους).

Λύση. Αν άνηκαν σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα, θα είχαμε μία συνεκτική συνιστώσα με μία κορυφή περιττού βαθμού, το οποίο είναι άτοπο. □

Άσκηση. Έστω απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές και m ακμές που αποτελείται από n_1 κορυφές με βαθμό k και n_2 κορυφές με βαθμό $k+1$. Να αποδείξετε ότι $n_1 = n(k+1) - 2m$ και $n_2 = 2m - nk$.

Από την εκφώνηση, $n_1 + n_2 = n \Rightarrow n_1 = n - n_2$. Επίσης, αφού το άθροισμα του βαθμού των κορυφών ισούται με το διπλάσιο των ακμών, έχουμε $n_1 k + n_2(k+1) = 2m$. Αντικαθιστώντας $n_1 k = nk - n_2 k$, παίρνουμε

$$nk - n_2 k + n_2(k+1) = 2m \Rightarrow n_2 = 2m - nk$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $n_1 = n - n_2$ και την παραπάνω ισότητα, παίρνουμε $n_1 = n - n_2 = n - (2m - nk) \Rightarrow n_1 = n(k+1) - 2m$. □

3 Κύκλος Euler

Κύκλος Euler σε ένα γράφημα είναι κάθε κύκλος (όχι απαραίτητα απλός) που διέρχεται από κάθε ακμή ακριβώς μία φορά και από κάθε κορυφή τουλάχιστον μία φορά.

Υπάρχει ένας πολύ κομψός χαρακτηρισμός των γραφημάτων που έχουν κύκλο Euler: Ένα συνεκτικό (μη-κατευθυνόμενο) γράφημα έχει κύκλο Euler ανν όλες οι κορυφές του γραφήματος έχουν άρτιο βαθμό. Επιπλέον, ένα συνεκτικό (μη-κατευθυνόμενο) γράφημα έχει κύκλο Euler ανν οι ακμές του γραφήματος μπορούν να χωριστούν σε ένα σύνολο ξένων μεταξύ τους απλών κύκλων.

Για να αντιληφθούμε διαισθητικά την ισοδυναμία μεταξύ της ύπαρξης κύκλου Euler και της απαίτησης για άρτιο βαθμό των κορυφών, ας επιστρέψουμε στον ορισμό. Ο κύκλος Euler διέρχεται από κάθε ακμή ακριβώς μία φορά και από κάθε κορυφή τουλάχιστον μία φορά. Επομένως, κάθε φορά που ο κύκλος επισκέπτεται μία κορυφή (από μία ακμή) την εγκαταλείπει από μία άλλη ακμή και στο τέλος όλες οι ακμές έχουν χρησιμοποιηθεί ακριβώς μία φορά. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κορυφή πρέπει να έχει άρτιο βαθμό (ακριβώς διπλάσιο από τον αριθμό των φορών που την επισκέφθηκε ο κύκλος Euler). Το αντίστροφο, μπορεί να αποδειχθεί με μαθηματική επαγωγή.

Για να φτιάξετε λοιπόν ένα γράφημα με κύκλο Euler, πρέπει όλες οι ακμές του να έχουν άρτιο βαθμό. Για να φτιάξετε ένα γράφημα που δεν έχει κύκλο Euler, αρκεί κάποιες κορυφές του να έχουν περιττό βαθμό. Ομοίως, για να αποδείξετε ότι ένα γράφημα έχει κύκλο Euler, αρκεί να αποδείξετε ότι όλες του οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Για να αποδείξετε ότι ένα γράφημα δεν έχει κύκλο Euler, αρκεί να αποδείξετε ότι κάποιες κορυφές του έχουν περιττό βαθμό.

Άσκηση. Να αποδείξετε ότι αν ένα γράφημα έχει k κορυφές με περιττό βαθμό, το σύνολο των ακμών του μπορεί να διαμεριστεί σε $k/2$ (το k είναι άρτιο) μονοπάτια.

Υπόδειξη: Υπάρχει μία λύση με μαθηματική επαγωγή. Μια δεύτερη λύση είναι να "ζευγαρώσετε" τις κορυφές περιττού βαθμού χρησιμοποιώντας $k/2$ νέες ακμές. Τώρα όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό και το γράφημα έχει κύκλο Euler. Αφαιρώντας τις ακμές που προσθέσατε "σπάτε" τον κύκλο σε $k/2$ μονοπάτια. □

Άσκηση. Ποιός είναι ο μέγιστος αριθμός ακμών ενός απλού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος με n κορυφές που έχει κύκλο Euler.

Λύση. Αν το n είναι περιττός, το $n-1$ είναι άρτιο. Σε αυτή την περίπτωση, το πλήρες γράφημα K_n έχει κύκλο Euler και ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι $\frac{n(n-1)}{2}$. Αν το n είναι άρτιος, το γράφημα όπου όλες οι ακμές έχουν βαθμό $n-2$ υπάρχει, είναι συνεκτικό, και συνεπώς έχει κύκλο Euler (Η ύπαρξη προκύπτει παίρνοντας το K_n, "ζευγαρώνοντας" τις κορυφές, και αφαιρώντας την ακμή που συνδέει κάθε ζευγάρι κορυφών. Η συνεκτικότητα από προηγούμενη άσκηση.) Το γράφημα αυτό έχει $\frac{n(n-2)}{2}$ ακμές. Κάθε γράφημα με n κορυφές και περισσότερες ακμές, θα πρέπει να έχει μία τουλάχιστον κορυφή με βαθμό $n-1$ (περιττός) και συνεπώς δεν θα έχει κύκλο Euler. Αν λοιπόν το n είναι άρτιος, ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι $\frac{n(n-2)}{2}$. □

Ένα συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα έχει κύκλο Euler ανν σε κάθε κορυφή, ο βαθμός εισόδου είναι ίσος με το βαθμό εξόδου. Αν λοιπόν πάρουμε ένα συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα και αντικαταστήσουμε κάθε ακμή του με δύο κατευθυνόμενες ακμές, μία σε κάθε κατεύθυνση, το αποτέλεσμα θα είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα με κύκλο Euler (Η συνεκτικότητα είναι δεδομένη. Ο βαθμός εισόδου και ο βαθμός εξόδου κάθε κορυφής στο κατευθυνόμενο γράφημα είναι ίσοι με το βαθμό της κορυφής στο αρχικό (μη-κατευθυνόμενο) γράφημα).

4 Κύκλος Hamilton

Κύκλος Hamilton σε ένα γράφημα είναι κάθε απλός κύκλος που διέρχεται από όλες τις κορυφές του γραφήματος (ισοδύναμα, κύκλος Hamilton είναι κάθε απλός κύκλος μήκους n ή κάθε κύκλος που διέρχεται από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά). Ένα γράφημα με κύκλο Hamilton ονομάζεται και Hamiltonian γράφημα.

Δεν είναι γνωστό κανένα σύνολο ικανών και αναγκαιών συνθηκών που να χαρακτηρίζει τα γραφήματα με κύκλο Hamilton. Αρκετές αναγκαίες συνθήκες είναι γνωστές. Για παράδειγμα, κάθε Hamiltonian γράφημα είναι συνεκτικό και δεν έχει *γέφυρες*[2] ούτε *σημεία κοπής*[3]. Κάθε διμερές Hamiltonian γράφημα έχει τον ίδιο αριθμό κορυφών και στα δύο μέρη. Αν ένα γράφημα δεν ικανοποιεί κάποια αναγκαία συνθήκη, δεν μπορεί να έχει κύκλο Hamilton. Υπάρχουν όμως γραφήματα που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες και δεν έχουν κύκλο Hamilton.

Οι πιο γνωστές ικανές συνθήκες είναι τα θεωρήματα του Dirac και του Ore. Το θεώρημα του Dirac είναι: Κάθε (απλό μη-κατευθυνόμενο) γράφημα με ελάχιστο βαθμό κορυφής μεγαλύτερο ή ίσο του $n/2$ είναι Hamiltonian. Το Θεώρημα του Ore αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Dirac: Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών ενός (απλού μη-κατευθυνόμενου) γραφήματος είναι τουλάχιστον n, το γράφημα έχει κύκλο Hamilton. Κάθε γράφημα που ικανοποιεί κάποια από τις ικανές συνθήκες έχει κύκλο Hamilton. Υπάρχουν όμως γραφήματα που δεν ικανοποιούν τις ικανές συνθήκες και έχουν κύκλο Hamilton.

Επομένως, αν πρέπει να αποδείξετε ότι κάποιο γράφημα έχει κύκλο Hamilton, η πρώτη σκέψη είναι να βρείτε έναν κύκλο Hamilton στο γράφημα. Αν αυτό δεν είναι δυνατόν (π.χ. το γράφημα είναι πολύ μεγάλο), πρέπει να δείξετε ότι ικανοποιεί κάποια από τις ικανές συνθήκες (π.χ. θεώρημα του Dirac). Αν πρέπει να δείξετε ότι ένα γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton, πρέπει να βρείτε κάποια αναγκαία συνθήκη που δεν ικανοποιείται από το γράφημα (π.χ. έχει σημείο κοπής).

Άσκηση. Να αποδείξετε ότι κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές δεν έχει κύκλο Euler, αλλά έχει κύκλο Hamilton.

Λύση. Το πλήρες γράφημα με 11 κορυφές έχει 55 ακμές. Συνεπώς, κάθε απλό γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές προκύπτει από το K_{11} με την αφαίρεση δύο ακμών. Για να αποκλείσω την ύπαρξη κύκλου Euler, χρειάζεται να διακρίνω δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. Οι δύο ακμές που αφαιρέθηκαν από το K_{11} προσπίπτουν στην ίδια κορυφή. Αφού το γράφημα είναι απλό, οι δύο ακμές μπορούν να έχουν μόνο το ένα άκρο τους κοινό. Το γράφημα έχει μία κορυφή βαθμού 8, δύο κορυφές βαθμού 9, και 8 κορυφές με βαθμό 10. Συνεπώς, δεν μπορεί να έχει κύκλο Euler, αφού περιέχει κάποιες κορυφές με περιττό βαθμό.

Περίπτωση 2. Αν οι δύο ακμές που αφαιρέθηκαν από το K_{11} προσπίπτουν σε τέσσερις διαφορετικές κορυφές, το γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές πρέπει να έχει 4 κορυφές βαθμού

[2] Μια ακμή ενός συνεκτικού γραφήματος ονομάζεται γέφυρα αν δεν υπάρχει κύκλος που να την περιέχει. Η αφαίρεση της γέφυρας αίρει τη συνεκτικότητα του γραφήματος.

[3] Μία κορυφή ενός συνεκτικού γραφήματος ονομάζεται σημείο κοπής αν η αφαίρεση της αίρει τη συνεκτικότητα του γραφήματος.

9 και 7 κορυφές βαθμού 10. Και σε αυτή την περίπτωση, το γράφημα δεν μπορεί να έχει κύκλο Euler.

Η ύπαρξη κύκλου Hamilton προκύπτει από το θεώρημα του Ore, αφού σε κάθε περίπτωση, το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών είναι τουλάχιστον $17 > 11$. □

Άσκηση. Να χαρακτηρίσετε την κλάση των γραφημάτων στα οποία κάθε κύκλος Euler είναι επίσης και κύκλος Hamilton.

Λύση. Ένας κύκλος ο οποίος είναι τόσο κύκλος Euler όσο και κύκλος Hamilton πρέπει να διέρχεται από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά (επειδή είναι κύκλος Hamilton) και από κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά (επειδή είναι κύκλος Euler). Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν το γράφημα είναι ένας απλός κύκλος C_n με n κορυφές και n ακμές (υπενθυμίζουμε ότι ο απλός κύκλος C_n , $n \geq 3$, αποτελείται από n κορυφές $u_1, u_2, \ldots, u_n$ και n ακμές $\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, \ldots, \{u_{n-1}, u_n\}, \{u_n, u_1\}$).

Συγκεκριμένα, αν το γράφημα περιείχε $n + 1$ ή περισσότερες ακμές, ο κύκλος Euler δεν θα ήταν κύκλος Hamilton (θα περιείχε περισσότερες από n ακμές και συνεπώς θα διερχόταν από κάποια κορυφή περισσότερες από μία φορές). Αν το γράφημα περιείχε $n - 1$ ή λιγότερες ακμές, είτε δεν θα περιείχε κανένα κύκλο (θα ήταν δέντρο) είτε δεν θα ήταν συνεκτικό, και δεν θα είχε ούτε κύκλο Euler ούτε κύκλο Hamilton. Τέλος, αν το γράφημα περιείχε n ακμές αλλά δεν ήταν το C_n, τότε θα περιείχε ένα κύκλο με μήκος μικρότερο του n και δεν θα μπορούσε να περιέχει ούτε κύκλο Euler ούτε κύκλο Hamilton. □

Άσκηση. Μία ακμή ονομάζεται *γέφυρα* αν δεν υπάρχει κύκλος που την περιέχει. Δείξτε ότι αν ένα απλό γράφημα έχει κύκλο Hamilton, τότε δεν μπορεί να περιέχει γέφυρα. Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα αν αντί για κύκλο Hamilton υποθέσουμε ότι το γράφημα έχει κύκλο Euler;

Λύση. Μία ακμή περιέχεται σε κύκλο ανν περιέχεται σε απλό κύκλο. Συγκεκριμένα, αν ένας κύκλος δεν είναι απλός, αποτελείται από την ένωση απλών κύκλων. Έτσι μπορούμε να κρατήσουμε τον απλό κύκλο που περιέχει την ακμή-γέφυρα που μας ενδιαφέρει. Επίσης γνωρίζουμε ότι ο κύκλος Hamilton διέρχεται από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά (δηλαδή, είναι ένας απλός κύκλος μήκους n, όπου n ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος). Ο κύκλος Euler διέρχεται από κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά και κάθε κορυφή του γραφήματος τουλάχιστον μία φορά.

Έστω $G(V, E)$ ένα οποιοδήποτε γράφημα με κύκλο Hamilton και $\{u, v\} \in E$ μία οποιαδήποτε ακμή του G. Αφού το γράφημα έχει κύκλο Hamilton, υπάρχει μονοπάτι π μεταξύ των u και v που δεν διέρχεται από την ακμή $\{u, v\}$. Το μονοπάτι π μαζί με την $\{u, v\}$ σχηματίζει κύκλο. Συνεπώς, καμία ακμή του γραφήματος G δεν μπορεί να είναι γέφυρα.

Με το ίδιο σκεπτικό, μια ακμή $\{u, v\}$ δεν μπορεί να είναι γέφυρα ακόμη και στην περίπτωση που απλώς υπάρχει κάποιος κύκλος που διέρχεται από τις u και v (ακόμη και αν αυτός ο κύκλος δεν είναι κύκλος Hamilton).

Όσο για τον κύκλο Euler, αυτός διέρχεται από όλες τις ακμές του γραφήματος. Συνεπώς, κάθε γράφημα με κύκλο Euler δεν μπορεί επίσης να περιέχει γέφυρα. □

Άσκηση. Να εξηγήσετε γιατί ένα γράφημα που περιέχει γέφυρα δεν μπορεί να έχει όλες τις κορυφές του με άρτιο βαθμό και επομένως να έχει κύκλο Euler. □

5 Αναπαράσταση Γραφημάτων

5.1 Πίνακας Γειτνίασης

Ο *Πίνακας Γειτνίασης* (Adjacency Matrix) A ενός γραφήματος $G(V,E)$[4] είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης $|V|\times|V|$ οι γραμμές και οι στήλες του οποίου αριθμούνται με βάση τις κορυφές του. Τα στοιχεία του πίνακα γειτνίασης ορίζονται με βάση τις ακμές του γραφήματος από τη σχέση:

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δείτε ότι για το ίδιο γράφημα, μπορούν να προκύψουν διαφορετικοί πίνακες γειτνίασης αν χρησιμοποιήσετε διαφορετική αρίθμηση κορυφών. Βέβαια αν θεωρήσετε δύο πίνακες που προκύπτουν από το ίδιο γράφημα και κάνετε την αντίστροφη διαδικασία (δηλ. κατασκευάσετε το γράφημα που αντιστοιχεί σε κάθε πίνακα), θα καταλήξετε σε *ισομορφικά* γραφήματα!

Οι βασικές ιδιότητες του πίνακα γειτνίασης ενός απλού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V,E)$ είναι

1. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα είναι 0 (γιατί δεν υπάρχουν ανακυκλώσεις) και ο πίνακας είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιο (οι ακμές δεν έχουν κατεύθυνση).
2. Το άθροισμα των στοιχείων της γραμμής ή της στήλης που αντιστοιχεί σε κάθε κορυφή v_i είναι ίσο με το βαθμό της κορυφής, δηλ. $\sum_{v_j \in V} A[v_i, v_j] = \sum_{v_j \in V} A[v_j, v_i] = \deg(v_i)$.
3. Το συνολικό άθροισμα των στοιχείων του πίνακα γειτνίασης είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών του γραφήματος, δηλ. $\sum_{v_i \in V} \sum_{v_j \in V} A[v_i, v_j] = 2\,|E|$.

Μπορεί να αποδειχθεί επαγωγικά ότι το $[i,j]$-στοιχείο του πίνακα A^ℓ (δηλ. της ℓ-οστής δύναμης του πίνακα γειτνίασης) είναι ίσο με τον αριθμό των *διαδρομών* (μπορεί να έχουν επαναλαμβανόμενες ακμές) που συνδέουν τις κορυφές v_i και v_j. Για παράδειγμα, $A^2[i,i] = \deg(v_i)$ για κάθε κορυφή $v_i \in V$ επειδή οι μοναδικές διαδρομές μήκους 2 που ξεκινούν και τελειώνουν στην ίδια κορυφή αποτελούνται από τις ακμές που προσπίπτουν στην κορυφή, έχουν δηλαδή τη μορφή $\{v_i, u\}, \{u, v_i\}$.

Ορίζουμε τον πίνακα $Y = \sum_{\ell=1}^{n-1} A^\ell$, όπου $n = |V|$ είναι ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος.

Πρόταση 1. *$Y[i,j] > 0$ ανν υπάρχει διαδρομή από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j.*

Απόδειξη. Αν υπάρχει διαδρομή από τη v_i στη v_j, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχει και (απλό) μονοπάτι μήκους $\ell \le n-1$. Επομένως, θα είναι $A^\ell[i,j] > 0$ που σημαίνει ότι $Y[i,j] > 0$ (επειδή οι δυνάμεις του πίνακα A δεν έχουν αρνητικά στοιχεία). Αντίστροφα, για να είναι $Y[i,j] > 0$, θα πρέπει να υπάρχει κάποιος ακέραιος ℓ, $1 \le \ell \le n-1$, για τον οποίο $A^\ell[i,j] > 0$. Επομένως, υπάρχει διαδρομή μήκους ℓ τη v_i στη v_j. □

[4] Σε αυτές τις σημειώσεις αναφερόμαστε μόνο στην αναπαράσταση απλών μη-κατευθυνόμενων γραφημάτων. Οι ορισμοί γενικεύονται και για όχι απλά ή /και κατευθυνόμενα γραφήματα.

Αν κάποιο στοιχείο του Y είναι 0, το γράφημα δεν είναι συνεκτικό. Πράγματι, αν υπάρχει μη-διαγώνιο στοιχείο $Y[i,j] = 0$, δεν υπάρχει διαδρομή μεταξύ των αντίστοιχων κορυφών σύμφωνα με την Πρόταση 1. Επίσης, αν υπάρχει διαγώνιο στοιχείο $Y[i,i] = 0$, η αντίστοιχη κορυφή πρέπει να είναι απομονωμένη. Αντίστροφα, αν το γράφημα είναι συνεκτικό, όλα τα στοιχεία του Y είναι θετικά.

Ας θεωρήσουμε τώρα τον $n \times n$ πίνακα X που ορίζεται ως:

$$X[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \neq j \text{ και } Y[i,j] > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Σαν άσκηση, να αποδείξετε ότι το γράφημα G (από το οποίο προκύπτει ο πίνακας Y) είναι συνεκτικό ανν το γράφημα με πίνακα γειτνίασης τον X είναι το K_n. Επίσης να αποδείξετε ότι αν το γράφημα G δεν είναι συνεκτικό, τότε το γράφημα που αντιστοιχεί στον πίνακα X έχει μία κλίκα για κάθε συνεκτική συνιστώσα του G.

Άσκηση. Έστω A ο πίνακας γειτνίασης ενός απλού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G με n κορυφές, και $\overline{A}$ ο πίνακας γειτνίασης του συμπληρωματικού γραφήματος $\overline{G}$. Έστω επίσης $Y = \sum_{\ell=1}^{n-1} A^\ell$ και $\overline{Y} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \overline{A}^\ell$. Ποιο είναι το γράφημα με πίνακα γειτνίασης τον $A + \overline{A}$ και γιατί; Υπάρχουν μηδενικά στοιχεία στον πίνακα $Y + \overline{Y}$; (Οι απαντήσεις είναι K_n και όχι αντίστοιχα. Απομένει σε εσάς να τις τεκμηριώσετε).

5.2 Πίνακας Πρόσπτωσης

Ο *Πίνακας Πρόσπτωσης* (Incidence Matrix) M ενός γραφήματος $G(V,E)$ είναι ένας πίνακας διάστασης $|V| \times |E|$ οι γραμμές του οποίου αριθμούνται με βάση τις κορυφές και οι στήλες με βάση τις ακμές. Τα στοιχεία του πίνακα πρόσπτωσης ορίζονται από τη σχέση:

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{αν η κορυφή } v_i \text{ είναι ένα από τα άκρα της ακμής } e_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Για το ίδιο γράφημα, μπορούν να προκύψουν διαφορετικοί πίνακες πρόσπτωσης για διαφορετική αρίθμηση κορυφών και ακμών. Όπως και για τους πίνακες γειτνίασης, δύο πίνακες πρόσπτωσης που προκύπτουν από το ίδιο γράφημα αντιστοιχούν σε ισομορφικά γραφήματα.

Οι βασικές ιδιότητες του πίνακα πρόσπτωσης ενός απλού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V,E)$ είναι

1. Το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι ίσο με το βαθμό της αντίστοιχης κορυφής.
2. Το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι ίσο με 2.
3. Το συνολικό άθροισμα των στοιχείων του πίνακα πρόσπτωσης είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών του γραφήματος.

6 Ισομορφικά Γραφήματα

Δύο γραφήματα $G(V_G, E_G)$ και $H(V_H, E_H)$ είναι *ισομορφικά* όταν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη (δηλ. 1-1 και επί) αντιστοιχία $f : V_G \mapsto V_H$ μεταξύ των κορυφών τους που διατηρεί τη γειτονικότητα (δηλ. $\{v, u\} \in E_G \Leftrightarrow \{f(v), f(u)\} \in E_H$). Η συνάρτηση / αντιστοιχία f αποκαλείται ισομορφισμός μεταξύ των γραφημάτων G και H. Είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότεροι από ένας ισομορφισμοί μεταξύ δύο γραφημάτων. Διαισθητικά, δύο γραφήματα είναι ισομορφικά αν πρόκειται για το ίδιο γράφημα "ζωγραφισμένο" με διαφορετικό τρόπο.

Η σχέση ισομορφισμού μεταξύ των γραφημάτων είναι σχέση *ισοδυναμίας*. Πράγματι, είναι ανακλαστική αφού κάθε γράφημα είναι ισομορφικό με τον εαυτό του, είναι συμμετρική γιατί ο ισομορφισμός είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, και είναι μεταβατική γιατί η σύνθεση δύο ισομορφισμών δίνει έναν ισομορφισμό. Κάθε κλάση ισοδυναμίας που ορίζεται από τη σχέση ισομορφισμού περιλαμβάνει γραφήματα που συμφωνούν πρακτικά σε όλες τις ιδιότητές τους (και άρα ουσιαστικά ταυτίζονται).

Μια ιδιότητα ενός γραφήματος G ονομάζεται *αναλλοίωτη* (ως προς τη σχέση του ισομορφισμού) αν κάθε γράφημα που είναι ισομορφικό με το G έχει την ίδια ιδιότητα. Με απλά λόγια, κάθε ιδιότητα που δεν μεταβάλλεται αν "ζωγραφίσουμε" το γράφημα διαφορετικά είναι αναλλοίωτη. Τα ισομορφικά γραφήματα συμφωνούν ως προς τις αναλλοίωτες ιδιότητές τους. Η έννοια του ισομορφισμού είναι σημαντική γιατί *όλες* οι σημαντικές γραφοθεωρητικές ιδιότητες είναι αναλλοίωτες[5].

Πώς αποδεικνύουμε ότι μία ιδιότητα είναι αναλλοίωτη. Για παράδειγμα, θα αποδείξουμε ότι η ιδιότητα ότι το γράφημα έχει μονοπάτι Hamilton είναι αναλλοίωτη. Παρόμοια χειριζόμαστε κάθε αναλλοίωτη ιδιότητα.

Θεωρούμε γράφημα $G(V_G, E_G)$ που έχει την ιδιότητα καθώς και μια δομή που πιστοποιεί ότι το G έχει την ιδιότητα (στο συγκεκριμένο παράδειγμα, μια τέτοια δομή είναι ένα μονοπάτι Hamilton). Θεωρούμε επίσης αυθαίρετα επιλεγμένο γράφημα $H(V_H, E_H)$ που είναι ισομορφικό με το G και έναν ισομορφισμό $f : V_G \mapsto V_H$ μεταξύ του G και του H.

Έστω $P = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ ένα μονοπάτι Hamilton στο G. Το P περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του γραφήματος G ακριβώς μία φορά και κάθε ζευγάρι διαδοχικών κορυφών στο P συνδέεται με ακμή. Έστω $f(P) = (f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_{n-1}), f(v_n))$ η εικόνα του P στο γράφημα H ως προς τον ισομορφισμό f. Αφού το f είναι μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των κορυφών των G και H, κάθε κορυφή του H περιέχεται στο $f(P)$ ακριβώς μία φορά. Αφού το f είναι ισομορφισμός και διατηρεί τη γειτονικότητα, κάθε ζευγάρι διαδοχικών κορυφών στο $f(P)$ συνδέεται με ακμή (γιατί το ίδιο συμβαίνει στο P). Συνεπώς το $f(P)$ είναι ένα μονοπάτι Hamilton στο H και η ιδιότητα είναι αναλλοίωτη ως προς τη σχέση του ισομορφισμού.

Η ίδια ακριβώς μεθοδολογία ακολουθείται για όλες τις ιδιότητες!

Για να δείξουμε ότι μία ιδιότητα *δεν* είναι αναλλοίωτη, παρουσιάζουμε ένα ζευγάρι ισομορφικών γραφημάτων που το ένα έχει και το άλλο δεν έχει την ιδιότητα.

Πώς αποδεικνύουμε ότι δύο γραφήματα είναι ισομορφικά. Ο πρώτος τρόπος είναι με τον ορισμό. Δηλαδή βρίσκουμε έναν ισομορφισμό f (μια αντιστοιχία μεταξύ των κορυφών τους) που διατηρεί τη γειτονικότητα. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να ελέγξουμε τις ακμές των δύο γραφημάτων

[5] Μια ιδιότητα που δεν είναι αναλλοίωτη πρέπει να εξαρτάται από τον τρόπο που το γράφημα είναι "ζωγραφισμένο", π.χ. δύο ακμές τέμνονται, δύο κορυφές βρίσκονται από την ίδια πλευρά σε σχέση με κάποιον άξονα συμμετρίας του επιπέδου, κλπ. Αυτές οι ιδιότητες έχουν συνήθως μικρότερη σημασία από ιδιότητες όπως ο αριθμός των κορυφών και των ακμών, αν είναι το γράφημα συνεκτικό, αν είναι k-μερές, αν περιέχει μία μεγάλη κλίκα ή ένα μεγάλο σύνολο ανεξαρτησίας, αν έχει κύκλο Hamilton ή Euler, κλπ. που δεν εξαρτώνται από τον τρόπο που το γράφημα είναι "ζωγραφισμένο" και είναι αναλλοίωτες.

μία-προς-μία για να επιβεβαιώσουμε ότι κάθε ακμή $\{u, v\}$ υπάρχει στο ένα γράφημα αν και μόνο αν η ακμή $\{f(u), f(v)\}$ υπάρχει στο δεύτερο.

Αν τα γραφήματα έχουν πολλές ακμές, προσπαθούμε να δείξουμε ότι τα συμπληρωματικά γραφήματα είναι ισομορφικά (χρησιμοποιούμε πάλι τον ορισμό). Ο ισομορφισμός των αρχικών γραφημάτων έπεται από το γεγονός ότι δύο γραφήματα είναι ισομορφικά αν και μόνο αν τα συμπληρωματικά τους είναι ισομορφικά. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι αν τα αρχικά γραφήματα έχουν πολλές ακμές, τα συμπληρωματικά έχουν λίγες, οπότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι είναι ισομορφικά.

Μια τρίτη μέθοδος (με περιορισμένη όμως εφαρμογή) είναι να αναδιατάξουμε τις κορυφές / ακμές του ενός γραφήματος ώστε ο πίνακας γειτονικότητας ή πρόσπτωσης να ταυτίζεται με τον αντίστοιχο πίνακα του δεύτερου γραφήματος. Για μεγάλα γραφήματα (π.χ. περισσότερες από 6 κορυφές) αυτή η μέθοδος χρειάζεται μεγάλη προσοχή και μπορεί εύκολα να οδηγήσει σε λάθη.
Πώς αποδεικνύουμε ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισομορφικά. Βρίσκουμε μια αναλλοίωτη ιδιότητα στην οποία δεν συμφωνούν. Οι πιο συνηθισμένες αναλλοίωτες ιδιότητες είναι ο αριθμός των κορυφών και των ακμών, η ακολουθία των βαθμών των κορυφών, η συνεκτικότητα, η ύπαρξη κύκλου συγκεκριμένου μήκους, κλπ.

Ένα γράφημα ονομάζεται *αυτοσυμπληρωματικό* όταν είναι ισομορφικό προς το συμπληρωματικό του γράφημα. Για να είναι ένα γράφημα $G(V, E)$ αυτοσυμπληρωματικό πρέπει είτε το $|V|$ είτε το $|V| - 1$ να διαιρείται ακριβώς με το 4 (να το αποδείξετε σαν άσκηση). Σαν άσκηση, βρείτε ένα αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 4 κορυφές και ένα αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 5 κορυφές. Υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 6 κορυφές;

Αυτομορφισμός πάνω σε ένα γράφημα G είναι ένας ισομορφισμός του G στον εαυτό του. Με απλά λόγια, ο αυτομορφισμός αλλάζει τα "ονόματα" αλλά διατηρεί τους "ρόλους" τον κορυφών στο γράφημα.

Διαισθητικά, ένα γράφημα είναι *μεταβατικό κατά τις κορυφές του* όταν όλες οι κορυφές του γραφήματος παίζουν ακριβώς τον ίδιο "ρόλο". Π.χ. ο απλός κύκλος με n κορυφές (C_n) και το πλήρες γράφημα με n κορυφές (K_n) είναι γραφήματα μεταβατικά κατά τις κορυφές τους επειδή δεν υπάρχει τρόπος να διακρίνουμε τη μία κορυφή από την άλλη. Αντίθετα, ένα απλό μονοπάτι με n κορυφές (P_n) δεν είναι μεταβατικό κατά τις κορυφές του επειδή αποτελείται από δύο άκρα και $n - 2$ ενδιάμεσες κορυφές.